UNIVERSITÉ DES LAGUNES | Année universitaire 2021-2022

Licence 2 Sciences et technologie | **TD de Probabilités**

Fiche d'exercices n°1

Exercice 1

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir «pile». En désignant par n le nombre de lancers effectués, on remplit une urne avec 3^n boules dont une de couleur blanche et les autres de couleur noire, et on procède à un tirage d'une boule dans cette urne.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2. On obtient une boule blanche. Quelle est la probabilité que la pièce ait donné «pile» du premier coup ?

Exercice 2

Un magasin possède n caisses. Les clients se repartissent de façon indépendante et équiprobable entre les n caisses. On note A_k lévénement «il y a k clients dans le magasin». On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(A_k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$ où $\lambda > 0$ est fixé.
1. Vérifier que $\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = 1$.
2. On note B_m l'événement «m clients sortent par la caisse n°1». Calculer $P(B_m)$ $\forall m \in \mathbb{N}$.
3. La caisse n°1 a vu passé m clients un jour donné. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu dans le magasin nm clients ?

Exercice 3

On lance, une seule fois, une pièce équilibrée, puis on effectue des tirages successifs dans une urne, contenant initialement une boule blanche et une boule noire, selon le protocole suivant :
- on tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne,
- on rajoute une boule blanche si l'on a obtenu «pile», et une boule noire si l'on a obtenu «face».

Ainsi, au moment du k-ième tirage, l'urne contient $k+1$ boules.
1. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage.
2. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k-ième tirage, calculer la probabilité p_k d'avoir obtenu «pile».
3. Calculer la probabilité d'obtenir k boules blanches lors des k premiers tirages.

Exercice 4

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la probabilité qu'une famille ait n enfants est égale à $\frac{1}{e} \times \frac{1}{n!}$. De plus, à chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille est egale à $\frac{1}{2}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit les événements : E_n « la famille a n enfants» et F_n « la famille a n filles ».
1. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un enfant. En déduire la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Calculer la probabilité qu'une famille ait k filles, sachant qu'elle a n enfants.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. En déduire la probabilité qu'une famille ait exactement k filles.

Fiche d'exercices n°2

Exercice 1

Le nombre de visiteurs quotidiens d'un parc d'attractions suit une loi de Poisson de paramètre 10000. Ce parc a dix portes d'entrées E_1, E_2,..., E_{10} qui sont choisies par les visiteurs de manière équiprobable.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée.
2. Quelle est la probabilité qu'un visiteur donné se présente à l'entrée E_1 ?
3. On désigne par X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 en une journée donnée. Trouver la loi de X_1, calculer son espérance et sa variance.
4. Sachant qu'un visiteur sur dix se débrouille pour entrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs payant et entrant par E_1.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \frac{a}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}$.
2. Déterminer a pour que $\{(n, p_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.
3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
4. On pose $Y = X^2 - 6X + 9$. Déterminer la loi de Y. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

Exercice 3

On dispose d'une pièce déséquilibrée, amenant «pile» avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux «piles» consécutifs, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = P(X = n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3.
2. Montrer que $\forall n \geq 3$, $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}$.
3. En déduire la loi de X. Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.
4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 4

La probabilité pour qu'une ampoule électrique ait une durée de vie supérieure à 2 ans est de $0,2$.

1. Sachant qu'un magasin possède 5 ampoules, calculer la probabilité

a. de ne pas changer d'ampoule en 2 ans ;

b. de changer toutes les ampoules en 2 ans ;

2. La durée de vie d'une ampoule électrique suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

a. Identifier le paramètre p.

b. un magasin possède 5 ampoules. On note X le nombre d'années avant de devoir changer la première ampoule. Identifier la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 5
$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, on pose :
$$P\left[(X=j)\cap(Y=k)\right] = \frac{1}{ek!}\times\frac{1}{2^{j+1}}.$$
1. Montrer que l'on définit ainsi la loi conjointe des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. Déterminer la loi de X et celle de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 6
Le nombre N de personnes de présentant à un bureau de poste suit une loi de Poisson de parametre λ.
Une personne vient au bureau de poste pour poster un envoi avec la probabilite p avec $p \in]0,1[$, et pour une autre opération avec la probabilité $q = 1-p$.
On suppose que chaque personne n'effectue qu'une opération, et qu'elles font ces opérations indépendamment les unes des autres.
On note X le nombre des personnes qui viennent pour poster un envoi et Y le nombre de celles qui viennent pour une autre opération.
1. Soit j un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que $[N=j]$?
2. Déterminer la loi du couple (X,N).
3. En déduire la loi de X. Donner les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.
4. Déterminer la loi de Y. En déduire que X et Y sont indépendantes.
5. Calculer $Cov(X,N)$ (on pourra remarquer que $N = X+Y$).
6. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X,N).

Fiche d'exercices n°3

Exercice 1
Soit c un nombre réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x)^2}, & \text{si } 0 \le x \le 1\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
1. Déterminer c pour que f soit une densité d'une variable aléatoire réelle X.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 2
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{si } \ge 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
4. On pose $Y = X^2$. Montrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 3

Soient a un nombre réel strictement positif et b un nombre réel non nul. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\left(\frac{x}{b}\right)^a}, & \text{si } x > 0\,; \\ 0, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité X.
2. Déterminer une densité de probabilité f de X.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X admet un moment d'ordre n et calculer $E(X^n)$.
4. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 4

Une machine fabrique des pièces cylindriques dont le diamètre exprimé en millimètres est une variable aléatoire D suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m est réglable et $\sigma = 0,4$.
1. On suppose que $m = 8$. Calculer $P(D < 7,5)$, $P(D > 9)$, $P(7,5 < D < 8,5)$.
2. Toute pièce est vérifiée à l'aide de deux calibres, l'un de $7,5$ mm et l'autre de $8,5$ mm ; elle est acceptée si elle passe dans le grand calibre et non dans le petit.
Déterminer la probabilité pour qu'une pièce soit réfusée si
a) $m = 7,5$; *b*) $m = 8$; *c*) $m = 8,5$.
3. Dans le cas où $m = 8$, déterminer la probabilité pour qu'une pièce soit acceptée sachant qu'elle passe dans le grand calibre.
4. Lorsque la pièce est trop petite, elle est rejetée ; la perte est alors de 10 euros. Si elle est trop grande, on peut la rectifier ; le coût de l'opération est alors de 3 euros et on admet que la pièce est acceptée après rectification.
Soit Z la variable aléatoire égale à la perte subie : Z prend les valeurs 10, 3 ou 0 suivant que la pièce est trop petite, trop grande ou bonne.
Calculer l'espérance mathématique de Z en fonction de m. Déterminer m pour que $E(Z)$ soit minimale (réglage optimum de la machine).

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $Y = X^2$.
1. Donner une densité de probabilité et la fonction de répartition de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de Y.
3. Justifier que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.
4. Calculer de deux manières l'espérance de Y.

Exercice 6

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont une densité conjointe est définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 2xy + \frac{3}{2}y^2, & \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer les densités marginales f_X de X et f_Y de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
4. Calculer la covariance puis le coefficient de corrélation linéaire de X et$Y$.
5. Déterminer les densités conditionnelles $f_{X/\{Y=y\}}$ et $f_{Y/\{X=x\}}$.
6. Calculer $P\left((X,Y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}]\right)$

Exercice 7

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles dont une densité conjointe est définie par

$$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\, exp\left[-\frac{3}{2}(x^2+y^2-xy)\right] \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Déterminer les densités marginales f_X de X et f_Y de Y. En déduire la loi de X et la loi de Y.
2. Déterminer les densités conditionnelles $f_{X/\{Y=y\}}$ et $f_{Y/\{X=x\}}$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
4. Calculer la covariance puis le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 8

Trois personnes, notées A, B, C entrent simultanément à la poste pour téléphoner. Il n'y a que deux cabines téléphoniques que A et B occupent immédiatement. C attend et remplace le premier sorti. On suppose que les durées de communication de A, B et C sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$, notées respectivement X, Y et Z.

1. On pose $U = sup(X,Y)$ et $V = inf(X,Y)$.

$a)$ Définir des densités des variables aléatoires U et V

$b)$ Calculer l'espérance et la variance de U et V.

$c)$ Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (U,V).

2. On pose $W = \mid X - Y \mid$.

$a)$ Déterminer une densité de $-Y$ puis une densité de $X-Y$.

$b)$ En déduire une densité de W.

$c)$ Les variables W et Z sont-elles indépendantes ? Définir une densité du couple (W,Z).

$d)$ Montrer que la probabilité de l'événement «C termine sa communication en dernier» est $P(W<Z)$. Calculer cette probabilité.

3. Soit T le temps total passé par C dans le bureau de poste.

$a)$ Déterminer une densité du couple (V,Z). En déduire une densité de T.

$b)$ Calculer l'espérance et la variance de T.

Exercice 9

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $U = X+Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$.

1. Calculer les fonctions de répartition de U et V. En déduire les fonctions de densité de X et Y.
2. Déterminer la densité du couple (U,V).
3. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Fiche d'exercices n°4

Exercice 1

Une entreprise fabrique des boîtes dont certaines sont défectueuses. On suppose que l'entreprise fabrique 100 boîtes par jour, que la probabilité qu'une boîte soit défectueuse est égale à $0,02$ et que les boîtes sont défectueuses ou non indépendamment les unes des autres. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boîtes défectueuses fabriquées un jour donné.

1. Déterminer la loi de X. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?

2. Calculer une valeur approchée de la probabilité qu'au plus deux boîtes défectueuses soient fabriquées dans la même journée.

3. On considère que l'entreprise perd sa qualification si, au cours d'une journée, 5% ou plus des boîtes fabriquées sont défectueuses.

a. Calculer la probabilité pour que, un jour donné, l'entreprise perde sa qualification.

b. Comment évoluent ces risques si l'entreprise double son nombre de boîtes fabriquées par jour ?

Exercice 2

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes dont chacune suit la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n), \quad Y_n = X_n X_{n+1}, \quad T_n = \frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n).$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à p.

2. Donner, pour tout $n \geq 1$, la loi de Y_n.

3. En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'espérance et la variance de T_n.

4. Montrer que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à p^2.

Exercice 3

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.

1. Quelle est la loi de S_n ?

2. Déterminer $P(S_n \leq n)$.

3. En utilisant le théorème central limite, montrer que $\underset{n\to+\infty}{lim} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Exercice 4

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $k > 0$, on pose :

$$Y_k = X_{k-1} + X_k, \quad Z_n = \frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n).$$

1. Déterminer la loi de Y_k, calculer son espérance et sa variance.

2. Calculer l'espérance et la variance de Z_n.

3. Etudier la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$. Peut-on utiliser la loi des grands nombres ?